10.3.7 Integrování substituční metodou II

Předpoklady: 10306

Př. 1: Vypočti:

a) $\int \frac{3}{\sqrt{5x-1}}dx$ b) $\int x^2\sqrt[3]{1-x^3}dx$ c) $\int \frac{1}{2-5x}dx$

a)

$$\int \frac{3}{\sqrt{5x-1}}dx = \int \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{5x-1}}5dx = \frac{3}{5}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{3}{5}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = \frac{6}{5}\sqrt{t}+C = \frac{6}{5}\sqrt{5x-1}+C$$

$t = 5x-1 \Rightarrow dt = 5\,dx$

b)

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x^3}dx = \int\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-3x^2\right)\sqrt[3]{1-x^3}dx = -\frac{1}{3}\int\sqrt[3]{t}\,dt = -\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{t^4}+C$$

$t = 1-x^3 \Rightarrow dt = -3x^2\,dx$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^4}+C$$

c)

$$\int\frac{1}{2-5x}dx = \int\left(-\frac{1}{5}\right)\frac{1}{2-5x}(-5)\,dx = -\frac{1}{5}\int\frac{1}{t}dt = -\frac{1}{5}\ln|t|+C = -\frac{1}{5}\ln|2-5x|+C$$

$= t = 2-5x \Rightarrow dt = -5\,dx$

Př. 2: Vypočti: $\int \sin x\cdot\cos x\,dx$.

.. a) $\int \sin x\cdot\cos x\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}+C = \frac{\sin^2 x}{2}+C$

$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$

Pedagogická poznámka: Čekám, zda si někdo z žák všimne, že tento příklad jsme už jednou řešili (daleko složitěji a obtížněji pomocí opakované metody per partes). V nejhorším na to upozorním sám.

Dodatek: Předchozí integrál je možné spočítat ještě dalším způsobem při využití goniometrických vzorců: $\int \sin x\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx$ (použili jsme vzorec $2\cdot\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$).

$$\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\sin 2x\cdot 2dx = \frac{1}{4}\int\sin t\,dt = \frac{1}{4}(-\cos t)+C = -\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

$t = 2x \Rightarrow dt = 2\,dx$

Musíme ještě dokázat, že výsledek se od výsledků získaných předchozími způsoby liší jen o konstantu:

$$-\frac{1}{4}(\cos 2x) = -\frac{1}{4}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = -\frac{1}{4}\left(1-\sin^2 x - \sin^2 x\right) = -\frac{1}{4}\left(1-2\sin^2 x\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\sin^2 x}{2}$$

Od předchozích výsledků se lišíme pouze o konstantu $-\frac{1}{4}$.

Př. 3: Vypočti:

a) $\int \cos^3 x \cdot \sin x \, dx$ b) $\int \frac{\ln x}{2x} dx$ c) $\int \frac{3}{(3-2x)^5} dx$

¨ a) $\int \cos^3 x \cdot \sin x \, dx = -\int \cos^3 x \cdot (-\sin x) \, dx = -\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$

$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$

b) $\int \frac{\ln x}{2x} dx = \frac{1}{2}\int \ln x \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}\int t \, dt = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{4} + C$

$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

c) $\int \frac{3}{(3-2x)^5} dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{(3-2x)^5}(-2) \, dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{t^5} dt = -\frac{3}{2}\frac{t^{-4}}{-4} = \frac{3}{8(3-2x)^4}$

$t = 3-2x \Rightarrow dt = -2 \, dx$

Př. 4: Vypočti:

a) $\int \sin(2x-\pi) \, dx$ b) $\int ae^{-x} \, dx$ c) $\int \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) dx$

a) $\int \sin(2x-\pi) \, dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x-\pi) 2dx = \frac{1}{2}\int \sin t \, dt = \frac{1}{2}(-\cos t) + C = -\frac{1}{2}\cos(2x-\pi) + C$

$t = 2x - \pi \Rightarrow dt = 2 \, dx$

b) $\int ae^{-x} \, dx = -a\int e^{-x}(-1) \, dx = -a\int e^t \, dt = -a \cdot e^t + C = -a \cdot e^{-x} + C$

$t = -x \Rightarrow dt = (-1) \, dx$

c) $\int \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \frac{3}{2}\int \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)\frac{2}{3} dx = \frac{3}{2}\int \cos t \, dt = \frac{3}{2}\sin t + C = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) + C$

$t = \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow dt = \frac{2}{3} dx$

Př. 5: Petáková:
strana 164/cvičení 89 b) d) f)

Shrnutí: Substituční metodu můžeme při integraci použít pokud se nám podaří vytvořit v integrálu derivaci substituované funkce.